Exercice 1: On a :
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \dfrac{3}{2^n} \leqslant 3$ donc (a_n) est bornée.
Pour n pair, $b_n = 2n$ donc (b_n) n'est pas bornée.
(c_n) est une suite convergente (vers $\frac{1}{2}$) donc bornée.

Exercice 2: Soit (u_n) une suite numérique réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - l| > \varepsilon$
2. $\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, u_n < A$
3. $\exists l_1 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l_1| \leqslant \varepsilon$
4. $\forall l_1 \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - l_1| > \varepsilon$

Exercice 3:
$a_n = \dfrac{2n+1}{3n-5} \longrightarrow \frac{2}{3}$
$b_n = \dfrac{-4n^2+3n+3}{-2n+3} \longrightarrow +\infty$
$c_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n} = \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \longrightarrow 1$
$d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \longrightarrow 0$
$e_n = \dfrac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}} \longrightarrow 0$
$f_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} \longrightarrow 1$
$g_n = \frac{\mathbf{e}^n}{n^n} = \mathbf{e}^{n-n\ln(n)} = \mathbf{e}^{n(1-\ln(n))} \longrightarrow 0$

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_n) : x\ln(x) = n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : x \mapsto x\ln(x) - n$ qui est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.
   On a $f_n(1) = -n \leqslant 0$ et $f_n(n+3) = n(\ln(n+3) - 1) + 3\ln(n+3) \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule une unique fois sur $[1; +\infty[$ i.e. (E_n) admet une unique solution sur $[1; +\infty[$ que l'on notera u_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}\ln(u_{n+1}) - n = 1 \geqslant 0 = f_n(u_n)$.
   Par croissance de f_n, on en déduit que (u_n) est croissante.
   De plus, pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$, $f_n(n) = n(\ln(n) - 1) \geqslant 0 = f_n(u_n)$.
   En utilisant la croissance de f_n à nouveau, on obtient que $u_n \leqslant n$ pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$.
3. On a alors $0 < \ln(u_3) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \ln(n)$ pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$. Par conséquent, pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$,
   $$u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \geqslant \frac{n}{\ln(n)}.$$
4. Par croissance comparée et minoration, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 5:

1. Soit (u_n) une suite divergente de limite $+\infty$ i.e. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A$.
   D'où $\forall n \in N, u_n \geqslant \min(u_0, ..., u_N, A)$. Donc (u_n) est minorée.

2. Soient (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite divergente de limite $-\infty$.
   Montrons que (u_n+v_n) diverge vers $-\infty$. Soit $A\in\mathbb{R}$, On a : $\exists M\in\mathbb{R},\forall n\in N, u_n\leqslant M$.
   De plus, (v_n) une suite divergente de limite $-\infty$ donc $\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N, v_n\leqslant A-M$.
   D'où $\forall n\geqslant N, v_n+u_n\leqslant M+A-M=A$.
   La suite (u_n+v_n) diverge vers $-\infty$.

Exercice 6: Soit (u_n) une suite périodique, c'est-à-dire qu'il existe $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+q}=u_n$.

1. On a que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\min(u_0,...,u_{q-1})\leqslant u_n\leqslant\max(u_0,...,u_{q-1})$. Donc la suite (u_n) est bornée.
2. Si (u_n) est constante alors (u_n) admet une limite (qui est finie).
   Supposons à présent que (u_n) admette une limite i.e. $\exists l\in\overline{\mathbb{R}}$ tel que $u_n\longrightarrow l$.
   D'après la question précédente, on sait de plus que $l\in\mathbb{R}$.
   Par l'absurde, supposons que (u_n) n'est pas constante i.e. $\exists n_0,n_1\in\mathbb{N}, u_{n_0}\neq u_{n_1}$.
   Pour $\varepsilon=\frac{|u_{n_1}-u_{n_0}|}{4}>0$, $\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N, |u_n-l|\leqslant\frac{|u_{n_1}-u_{n_0}|}{4}$.
   Il s'avère qu'il existe $q_0,q_1\in N$ tel que n_0+pq_0 et n_1+pq_1 soient supérieurs à N.
   D'où
   $$|u_{n_1}-u_{n_0}|=|u_{n_1+pq_1}-u_{n_0+pq_0}|\leqslant|u_{n_1+pq_1}-l|+|u_{n_0+pq_0}-l|\leqslant 2\frac{|u_{n_1}-u_{n_0}|}{4}$$
   On a donc $1\leqslant\frac{1}{2}$ ce qui est absurde d'où (u_n) est constante .
   La récurrence est établie.

Exercice 7: Soit (u_n) une suite d'entier qui converge. Notons $l\in\mathbb{R}$ sa limite.
Pour $\varepsilon=\frac{1}{3}$, $\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N, |u_n-l|\leqslant\frac{1}{3}$.
Soient $n,m\geqslant N$. On a : $|u_n-u_m|\leqslant|u_n-l|+|l-u_m|\leqslant\frac{2}{3}$.
Or $u_n,u_m\in\mathbb{Z}$, donc $u_n=u_m$. La suite (u_n) est stationnaire à partir du rang N.

Exercice 8:

1. $(\text{ch}(\cos(n)))$ est minorée par 1 donc $(\text{Arctan}(\text{ch}(\cos(n))))$ est minorée par $\frac{\pi}{4}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant\frac{\pi}{4}\frac{\mathbf{e}^n}{n}$.
   Par croissance comparée et minoration, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. $$\forall n\in\mathbb{N},\ \cos(n)-2\leqslant -1$$
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{\cos(n)-2}{\text{Arctan}\left(\mathbf{e}^{-n}\right)}\leqslant\frac{-1}{\text{Arctan}\left(\mathbf{e}^{-n}\right)}$$
   La suite $\left(\text{Arctan}\left(\mathbf{e}^{-n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par valeurs positives donc $\frac{-1}{\text{Arctan}(\mathbf{e}^{-n})}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$.
   Par le théorème de divergence par majoration, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
3. $$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n &= \frac{n!}{n^n}=\frac{1\times2\times...\times n}{n\times n\times...\times n}=\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times...\times\frac{n-1}{n}\times1\\ &\leqslant \frac{1}{n}\times1\times...\times1\times1\\ \text{Donc, }\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant u_n &\leqslant \frac{1}{n}.\end{aligned}$$
   La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de limite 0.
   Par le théorème d'encadrement, la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

4. On va minorer la suite par une suite qui diverge vers $+\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ u_n &\geqslant \sqrt{n} \end{aligned}$$

La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Par le théorème de minoration, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

5.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R},\ na - 1 &< \lfloor na \rfloor \leqslant na \\ \frac{na-1}{n} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \leqslant \frac{na}{n} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R},\ a - \frac{1}{n} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \leqslant a \end{aligned}$$

La suite $\left(a - \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a. Par encadrement, la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

6.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ na - 1 &< \lfloor na \rfloor \leqslant na \\ \text{Si } a > 0,\ \frac{na-1}{a} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \leqslant \frac{na}{a} \\ \text{Si } a < 0,\ \frac{na-1}{a} &> \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \geqslant \frac{na}{a} \end{aligned}$$

Les suites $\left(n - \dfrac{1}{a}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.
Par le théorème de minoration, quelque soit le signe de a, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

<u>Exercice 9</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x$.

1. On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) e^x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n (x-1) e^x \,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, cette suite est minorée par 0 donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $l \geqslant 0$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, on obtient $I_{n+1} = \mathbf{e} - (n+1)I_n$. Si on suppose que $l \neq 0$, on obtient une absurdité en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus. Donc $l = 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathbf{e} \,\mathrm{d}x$. i.e. $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathbf{e}}{n+1}$. D'après le théorème des gendarmes, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 10:

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$1 < \frac{2^n}{2^n - 1} \leqslant 2 \Leftrightarrow 2^n - 1 < 2^n \leqslant 2(2^n - 1) \Leftrightarrow -1 < 0 \leqslant 2^n - 2$$
La dernière double inéquation est vraie. Par équivalence, la première est vraie aussi.

2. De la question précédente, on déduit que l'ensemble A est minorée par 1 et majoré par 2.
De plus, $2 \in A$ donc A est non vide.
On en déduit que A admet une borne inférieure et une borne supérieure, $\inf(A)$ et $\sup(A)$, et que
$$\sup(A) \leqslant 2 \text{ et } \inf(A) \geqslant 1.$$
2 est un majorant atteint (pour $n = 1$) donc $2 = \max(A)$. Ainsi, $\sup(A) = 2$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$ donc d'après la caractérisation de la borne inf, on a $\inf(A) = 1$. Cette borne n'est pas atteinte donc A n'admet pas de minimum.

Exercice 11: On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$.
Cette fonction est la quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2+2)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$
Cette quantité est du même signe que $-x$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et par parité de la fonction f, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
On obtient le tableau suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

L'ensemble A est donc minoré par 1, majorée par 2 qui est atteint.
A est donc un ensemble non vide et borné donc il admet une borne inférieure et une borne supérieure.
De plus, 2 est un majorant atteint donc $2 = \max(A) = \sup(A)$.

Par un argument de limites, on a des éléments aussi proche que l'on veut de 1 sans jamais l'atteindre. A n'admet donc pas de plus petit élément et $\inf(A) = 1$.

L'ensemble B est minoré par 0 car le numérateur et le dénominateur sont des quantités positives.
Nous allons montrer que $\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \frac{nm}{(n+m)^2} \leqslant \frac{1}{4}$.

Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
$$\frac{nm}{(n+m)^2} \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4nm \leqslant n^2 + 2nm + m^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant (n-m)^2.$$
La dernière inéquation est vérifiée pour tous les couples $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Par équivalence, la première l'est donc aussi.

L'ensemble B est donc minoré strictement par 0 et majoré par $\frac{1}{4}$ qui est atteint pour $n=1$ et $m=1$.
Cet ensemble admet donc une borne inférieure $\inf(B)$ et une borne supérieure $\sup(B)$ qui vérifient $\sup(B)=\max(B)=\frac{1}{4}$ et $\inf(B)\geqslant 0$.

Prenons les couples de la forme $(1,m)$ pour $m\in\mathbb{N}^*$.
$\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{m}{(1+m)^2}=0$ donc donc d'après la caractérisation de la borne inf, on a $\inf(B)=0$. Cette borne n'est pas atteinte donc B n'admet pas de minimum.

Exercice 12:

1. La suite (u_n) est bornée : $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant M$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |w_n|=\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}u_k}{n+1}\right|\leqslant\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}|u_k|}{n+1}\leqslant\frac{(n+1)M}{n+1}=M$$

La suite (w_n) est donc elle aussi bornée.

Pour la réciproque, prenons la suite $u_n=(-1)^n\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=\begin{cases}p \text{ pour } n=2p\\ -p \text{ pour } n=2p+1\end{cases}$.
Cette suite n'est pas bornée.
La suite (w_n) est alors définie par $w_n=\begin{cases}0 \text{ pour } n=2p\\ \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n-1}{2} \text{ pour } n=2p+1\end{cases}$. Cette suite est bornée par $\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$: $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geqslant n_0,\ |u_n-l|\leqslant\varepsilon$.

Soit $\varepsilon>0$. Soit $N\geqslant n_0$. Soit $n\geqslant N$.

$$\begin{aligned}
|w_n-l| &= \left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}u_k}{n+1}-l\right|=\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}u_k-(n+1)l}{n+1}\right|\leqslant\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}|u_k-l|}{n+1}\\
\sum_{k=0}^{n}|u_k-l| &= \sum_{k=0}^{N}|u_k-l|+\sum_{k=N+1}^{n}|u_k-l|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{N}|u_k-l|+(n-N)\varepsilon\\
\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}|u_k-l|}{n+1} &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|u_k-l|+\frac{n-N}{n+1}\varepsilon\\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|u_k-l|+\varepsilon
\end{aligned}$$

Or, la quantité $\sum\limits_{k=0}^{N}|u_k-l|$ ne dépend pas de n donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{N}|u_k-l|=0$. On peut rendre cette quantité aussi petite que l'on veut donc $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=l$.

Pour la réciproque, prenons la suite de terme général $u_n=(-1)^n$. Cette suite n'est pas convergente.

La suite (w_n) est alors définie par $w_n = \begin{cases} 0 \text{ pour } n = 2p+1 \\ \dfrac{1}{n+1} \text{ pour } n = 2p \end{cases}$. Cette suite converge vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1} u_k}{n+2} - \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{n+1} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}(n+1)u_k - \sum\limits_{k=0}^{n}(n+2)u_k}{n(n+1)} = \frac{(n+1)u_{n+1} - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{n(n+1)}$$

Or, la suite (u_n) est croissante donc : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k \leqslant u_{n+1}$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leqslant (n+1)u_{n+1}$ donc, la suite (w_n) est croissante.

Exercice 13:

1. Les suites (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = 2\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = 2\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} \geqslant 1$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}\tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = 2.\tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right).\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2\tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = 1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \leqslant 1$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

$$u_n - v_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\right) = \theta\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}}\left(1 - \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}\right)$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
Ces suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left((n+1)\ln(n+2) + n\ln(n) - (2n+1)\ln(n+1)\right)$$

La fonction $f : x \mapsto (x+1)\ln(x+2) + x\ln(x) - (2x+1)\ln(x+1)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\ln(n+2) + n\ln(n) - (2n+1)\ln(n+1) \geqslant 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \exp\left((n+2)\ln(n+2) + (n+1)\ln(n) - (2n+3)\ln(n+1)\right)$$

La fonction $g : x \mapsto (x+2)\ln(x+2) + (x+1)\ln(x) - (2x+3)\ln(x+1)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\ln(n+2) + (n+1)\ln(n) - (2n+3)\ln(n+1) \leqslant 0$.

Ainsi, la suite (v_n) est décroissante.

$$\begin{aligned}
u_n - v_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = -\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = -\frac{1}{n}\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\
n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\\
&\text{Donc, } \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \mathbf{e}\\
&\text{Donc, } \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0
\end{aligned}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

<u>Exercice 14:</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - $S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leqslant 0$
   - $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geqslant 0$
   - $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$

   Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles ont donc la même limite.
2. On en déduit que la suite (S_n) converge vers cette limite commune.

<u>Exercice 15:</u> Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. C'est la *série harmonique*.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$$
   La suite (H_n) est croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
   car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. D'après le théorème de la limite monotone, (H_n) admet une limite (finie ou $+\infty$). Supposons que (H_n) converge, la suite extraite (H_{2n}) converge vers la même limite. Par passage à la limite dans l'inéquation de la question 2, on obtient : $0 \geqslant \frac{1}{2}$. Ce qui est absurde.
   Donc (H_n) diverge vers $+\infty$.

<u>Exercice 16:</u> On va raisonner par l'absurde. Supposons que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note l sa limite.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos(n-1) + \cos(n+1) = 2\cos(n)\cos(1)$.

  Les suites $(\cos(n-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers l. Par passage à la limite dans l'égalité, on obtient
$$2l = 2l\cos(1) \text{ donc } l = 0.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$.

  La suite $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l. Par passage à la limite dans l'égalité, on obtient
  $$l = 2l^2 - 1$$
  Or, 0 n'est pas solution de cette équation donc on aboutit à une contradiction.

La suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 17: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que
$$u_0 = 1,\ v_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 3v_n + 2u_n$$

1. $u_1 = 3u_0 + 2v_0 = 7$, $v_1 = 3v_0 + 2u_0 = 8$, $u_2 = 3u_1 + 2v_1 = 37$ et $v_2 = 3v_1 + 2u_1 = 38$.
2. On dit qu'une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n$. La valeur de la constante est ensuite donnée par la valeur du premier terme.
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - (3v_n + 2u_n) = u_n - v_n$$
   La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et vaut $u_0 - v_0 = -1$. En particulier,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$$
3. On doit montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_n + 2(u_n + 1) = 5u_n + 2$$
   La suite (u_n) est bien une suite arithmético-géométrique.
4. On va appliquer la méthode qui permet d'obtenir l'expression du terme général à partir de la formule de récurrence.

   (a) Recherche du point fixe
   $$\text{Soit } x \in \mathbb{R}.\quad x = 5x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - \left(\frac{-1}{2}\right) = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)$.
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 5u_n + 2 + \frac{1}{2} = 5u_n + \frac{5}{2} = 5\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 5w_n$$
   La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est donc une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $w_0 = u_0 + \frac{1}{2}$.
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{3}{2} \times 5^n$$

   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n - \left(\frac{1}{2}\right)$. Donc,
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}$$

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}$$

Exercice 18:

1. C'est une suite arithmético-géométrique.

   (a) Recherche du point fixe

   $$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1$$

   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - (-1) = u_n + 1$.

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1) = 2w_n$$

   La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = u_0 + 1 = 1$.

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2^n$$

   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n - 1$. Donc,

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$$

2. L'équation caractéristique associée à cette suite est $X^2 = 4X - 4$ de discriminant $\Delta = 16 - 16 = 0$. Cette équation admet donc une racine double $x = \frac{4}{2} = 2$. On en déduit la forme du terme général de la suite (u_n)

   $$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + nB) \times 2^n$$

   Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.

   $$\begin{cases} u_0 = A = 1 \\ u_1 = (A + B) \times 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

   L'unique suite définie dans l'énoncé a un terme général de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1 - n)2^n$.

3. L'équation caractéristique associée à cette suite est $X^2 = X - 1$ de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$. Cette équation admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2} = \mathbf{e}^{\frac{i\pi}{3}}$ et $r_2 = \frac{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2} = \mathbf{e}^{-\frac{i\pi}{3}}$. On en déduit la forme du terme général de la suite (u_n) :

   $$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A\cos(n\frac{\pi}{3}) + B\sin(n\frac{\pi}{3})$$

   Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.

   $$\begin{cases} u_0 = A = 1 \\ u_1 = A \times \frac{1}{2} + B \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \sqrt{3} \end{cases}$$

   L'unique suite définie dans l'énoncé a un terme général de la forme :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(n\frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}\sin(n\frac{\pi}{3}) = 2\cos((n-1)\frac{\pi}{3})$.

Exercice 19:

1. Cette question est là pour justifier la bonne définition de la suite.
   Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)\ :\ "0 < x_n < 1"$.

- Initialisation: $x_1 = \dfrac{x_0(1+x_0)}{1+2x_0} = \dfrac{2}{3}$ donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité: Supposons la propriété vraie à un rang $n \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & x_n < 1 \\ 0 & < & 1+x_n < 1+2x_n \\ 0 & < & \dfrac{1+x_n}{1+2x_n} < 1 \\ 0 & < & \dfrac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} < 1 \end{array}$$

  donc $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion: Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < x_n < 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite est formée de termes strictement positifs.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+x_n}{1+2x_n} < 1$$

   La suite (x_n) est décroissante.

3. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0. Par le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons l sa limite. Comme $f : x \mapsto \frac{x(1+x)}{1+2x}$ est continue sur $[0,1]$, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient

$$l = \frac{l(1+l)}{1+2l} \Leftrightarrow l + 2l^2 = l + l^2 \Leftrightarrow l = 0.$$

   La suite (x_n) converge vers 0.

Exercice 20: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \text{sh}(u_n)$.
La fonction sh est croissante. On a $u_1 \geqslant 1 = u_0$. À l'aide d'une récurrence, on montre facilement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc $u_n \longrightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. Par l'absurde, supposons que $l \in \mathbb{R}$, comme sh est continue, on sait que l vérifie $l = \text{sh}(l)$. Or la seule possibilité est $l = 0$ ce qui rentre en absurdité avec la croissance de (u_n) et $u_0 = 1$.
Conclusion : $u_n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 21: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n}$.

1. On peut montrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant 2$, en particulier $u_n \neq -1$. Donc (u_n) est bien définie et bornée.

2. Posons $f : [1,2] \to [1,2]$ telle que $\forall x \in [1,2], f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$.
   La fonction f est décroissante. On peut montrer par récurrence que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante. Ces deux suites sont bornées donc convergentes. Leurs limites respectives sont dans $[1,2]$ et sont solutions de l'équation $x = f \circ f(x)$ (car $f \circ f$ est continue). Or

$$x = f\circ f(x) \iff x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+x}} \iff x = 1 + \frac{1+x}{3+2x} \iff x = \frac{4+3x}{3+2x} \iff 2x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

   D'où (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers $\sqrt{2}$. D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.